Тема 4. Адаптивные методы прогнозирования

1. ***Сущность адаптивных методов прогнозирования***
2. ***Экспоненциальное сглаживание***
3. ***Адаптивные полиномиальные модели***
4. ***Модель Хольта-Винтерса***
5. ***Этапы прогнозирования на основе адаптивных полиномиальных моделей***

Основные типы адаптивных моделей

- модели полиномиальных и экспоненциальных трендов;
- модели тренда и сезонных явлений аддитивного и мультипликативного типа; адаптивная модель гистограммы;
- модель фазового анализа неустойчивых циклических колебаний;
- модели с адаптивными параметрами адаптации;
- модели авторегрессии с переменными коэффициентами;
- комбинированные модели селективного и гибридного типа (модели с переменной структурой уравнения);
- адаптивный корреляционный анализ;
- адаптивная множественная регрессия;
- модели с условной гетероскедастичностью;
- адаптивные нелинейные модели.

$$S_t = \alpha \cdot y_{t-1} + \beta \cdot S_{t-1} \qquad (1)$$

где S_t – значение экспоненциальной средней в момент t,

α – параметр сглаживания, α = const, 0<α<1;

$$\beta = 1 - \alpha$$

$$S_t = \alpha \cdot y_{t-1} + \beta \cdot S_{t-1} = \alpha \cdot y_{t-1} + \beta \cdot (\alpha \cdot y_{t-1} + \beta \cdot S_{t-2}) =$$

$$= \alpha \cdot y_{t-1} + \alpha \cdot \beta \cdot y_{t-1} + \beta^2 \cdot S_{t-2} =$$

$$= \ldots = \alpha \cdot y_t + \alpha \cdot \beta \cdot y_{t-1} + \alpha \cdot \beta^2 \cdot S_{t-2} +$$

$$+ \ldots + \alpha \cdot \beta^i \cdot S_{t-i} + \ldots + \beta^n \cdot S_0$$

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \beta^i y_{t-i} + \beta^n S_0 \qquad (2)$$

При $n \to \infty$ $\beta^n \to 0$, следовательно,

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i y_{t-i} \qquad (3)$$

$$D[S_t] = \frac{\alpha}{2-\alpha}\sigma^2 \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{2}{n+1} \tag{5}$$

$$y_t = a_{1,t} + \varepsilon_t \qquad (6)$$

$$y_\tau(t) = a_{1,t} \qquad (7)$$

$$a_{1,t} = S_t;$$

$$a_{1,0} = S_0.$$

$$S_t = S_{t-1} + \alpha(y_{t-1} - S_{t-1}) \qquad (8)$$

$$y_\tau(t) = a_{1,t} + a_{2,t}\tau \qquad (9)$$

$$(0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta < 1)$$

Модели линейного роста для расчетов прогноза $\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t}\tau$

Название модели	Оценка коэффициентов
Модель Ч. Хольта	$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 y_t + (1-\alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1})$ $\hat{a}_{2,t} = \alpha_2(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_2)\hat{a}_{2,t-1}$
Модель Р. Брауна	$\hat{a}_{1,t} = \hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1} + (1-\beta^2)e_t$ $\hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + (1-\beta^2)e_t$
Модель Дж. Бокса и Г. Дженкинса	$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 y_t + (1-\alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}) + \alpha_3(e_t - e_{t-1})$ $\hat{a}_{2,t} = \alpha_2(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_2)\hat{a}_{2,t-1}$

$$a_{1,t} = a_{1,t-1} + a_{2,t-1} + \alpha_1 e_t;$$
$$a_{2,t} = a_{2,t-1} + \alpha_1 \alpha_2 e_t, \qquad (10)$$

$$e_t = y_t - y_{t-1}$$

$$S_t^{(p)} = \alpha S_t^{(p-1)} + \beta S_{t-1}^{(p)} \qquad (11)$$

$$y_{\tau}(t) = a_1 + a_2\tau + \frac{1}{2}a_3\tau^2 + ... + \frac{1}{n!}a_{n+1}\tau^n \qquad (12)$$

Основные формулы для прогнозирования по адаптивным полиномиальным моделям

Степень	Начальные условия	Экспоненциальные средние	Оценка коэффициентов	Модель прогноза
1	2	3	4	5
0	$S_0^{(1)} = \hat{a}_{1,0}$	$S_t^{(1)} = \alpha y_t + \beta S_{t-1}^{(1)}$	$\hat{a}_{1,t} = S_t^{(1)}$	$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t}$
1	$S_0^{(1)} = \hat{a}_{1,0} - \frac{\beta}{\alpha}\hat{a}_{2,0}$ $S_0^{(2)} = \hat{a}_{1,0} - \frac{2\beta}{\alpha}\hat{a}_{2,0}$	$S_t^{(1)} = \alpha y_t + \beta S_{t-1}^{(1)}$ $S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + \beta S_{t-1}^{(2)}$	$\hat{a}_{1,t} = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$ $\hat{a}_{2,t} = \frac{\alpha}{\beta}[S_t^{(1)} - S_t^{(2)}]$	$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \tau\hat{a}_{2,t}$
2	$S_0^{(1)} = \hat{a}_{1,0} - \frac{\beta}{\alpha}\hat{a}_{2,0} + \frac{\beta(2-\alpha)}{2\alpha^2}\hat{a}_{3,0}$ $S_0^{(2)} = \hat{a}_{1,0} - \frac{2\beta}{\alpha}\hat{a}_{2,0} + \frac{\beta(3-2\alpha)}{\alpha^2}\hat{a}_{3,0}$ $S_0^{(3)} = \hat{a}_{1,0} - \frac{3\beta}{\alpha}\hat{a}_{2,0} + \frac{3\beta(4-3\alpha)}{2\alpha^2}\hat{a}_{3,0}$	$S_t^{(1)} = \alpha y_t + \beta S_{t-1}^{(1)}$ $S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + \beta S_{t-1}^{(2)}$ $S_t^{(3)} = \alpha S_t^{(2)} + \beta S_{t-1}^{(3)}$	$\hat{a}_{1,t} = 3(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) + S_t^{(3)}$ $\hat{a}_{2,t} = \frac{\alpha}{2\beta^2}[(6-5\alpha)S_t^{(1)} -$ $-2(5-4\alpha)S_t^{(2)} + (4-3\alpha)S_t^{(3)}]$ $\hat{a}_{3,t} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)})$	$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{1,t} + \tau\hat{a}_{2,t} +$ $+\frac{1}{2}\tau^2\hat{a}_{3,t}$

Модель прогноза Хольта-Винтерса – это трёхпараметрическая модель прогноза, которая учитывает:

1. Сглаженный экспоненциальный ряд
2. Тренд
3. Сезонность

$$\begin{cases} E_t = \alpha \cdot \dfrac{Y_t}{S_{t-s}} + (1-\alpha) \cdot (E_{t-1} + T_{t-1}), & \text{Экспонента} \\ T_t = \beta \cdot (E_t - E_{t-1}) + (1-\beta) \cdot T_{t-1}, & \text{Тренд} \\ S_t = \gamma \cdot \dfrac{Y_t}{E_t} + (1-\gamma) \cdot S_{t-s}, & \text{Сезонность} \\ Y_t = (E_t + T_t \cdot t) \cdot S_{t-s}. & \text{Прогноз} \end{cases}$$

Y_t – текущее значение ряда;

E_t – экспоненциально сглаженная величина за текущий период;

T_t – значение тренда на текущий период;

α – коэффициент сглаживания ряда;

β – коэффициент сглаживания тренда

γ – коэффициент сглаживания сезонности;

S_{t-s} – коэффициент сезонности за этот же период в предыдущем сезоне;

t – порядковый номер периода, на который делаем прогноз;

Алгоритм применения модели Хольта-Винтерса

1. Расчёт экспоненциально сглаженного ряда:

$$E_t = \alpha \cdot \frac{Y_t}{S_{t-s}} + (1-\alpha) \cdot (E_{t-1} + T_{t-1})$$

2. Определение значений тренда:

$$T_t = \beta \cdot (E_t - E_{t-1}) + (1-\beta) \cdot T_{t-1}$$

3. Оценка сезонности:

$$S_t = \gamma \cdot \frac{Y_t}{E_t} + (1-\gamma) \cdot S_{t-s}$$

4. Прогнозирование на период *t+p*:

$$Y_{t+p} = (E_t + p \cdot T_t) \cdot S_{t-s+p}$$

Коэффициент сглаживания ряда α задается вручную и находится в диапазоне от 0 до 1

Для первого периода в начале данных экспоненциально сглаженный ряд равен первому значению ряда: $E_1 = Y_1$

Сезонность в первом и втором периоде S t-s равна 1

Коэффициент сглаживания тренда β задается вами вручную и находится в диапазоне от 0 до 1

Значение тренда для первого периода равно 0 ($T_1 = 0$).